سلَّم تصحيح امتحان مقرر المعادلات الفيزيائية (الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 – 2017)

السؤال الأول(20 درجة): لتكن لدينا معادلة الذبذبات المتجانسة الآتية:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \ , \ (-\infty < x < +\infty \ , \ t > 0)$$

والشروط الابتدائية:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \quad , \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$$

والمطلوب:

1) أكتب دستور حل معادلة الذبذبات المتجانسة (علاقة دالأمبير).

2) أوجد حل المعادلة السابقة عندما $0 < x < +\infty \ , \ t > 0$ ، والمحقق للشروط الابتدائية ذات الدوال الفردية عندما $0 < x < +\infty$ والذي يحقق الشرط الحدي: $u(0,t) = 0 \ , t > 0$.

تطبيق: أوجد الحل في حالة:

$$u(0,t) = 0 \ , \ \varphi(x) = x \quad , \quad \psi(x) = 2x \ , \ 0 < x < +\infty \ , \ a = 1 \ , t > x$$

الحل:

أولاً: يعطى دستور حل معادلة الذبذبات المتجانسة (علاقة دالأمبير) بالشكل التالي:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz$$

ثانياً: إيجاد حل المعادلة:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \ , \ (-\infty < x < +\infty \ , \ t > 0) \quad \cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \quad , \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \quad \cdots\cdots(2)$$

والشرط الحدي:

$$u(0,t) = 0 \quad ; \quad t > 0 \quad \cdots\cdots(3)$$

علماً أنَّ $\varphi(x) \ , \ \psi(x)$ دالتين فرديتين.

الحل:

لندرس الدالتين $\phi(x) \ , \ \Psi(x)$ اللتين تعتبران استكمالين فرديين للدالتين $\varphi(x) , \psi(x)$ اللتين تدخلان في الشروط (2) أي أنَّ:

$$\phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , \quad x > 0 \\ -\varphi(-x) & , \quad x < 0 \end{cases} \qquad , \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & , \quad x > 0 \\ -\psi(-x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

ومن علاقة دالأمبير لدينا:

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(z)dz \quad \cdots\cdots(4)$$

معرفة على جميع قيم x حيث $-\infty < x < +\infty \ , \ t > 0$ ، وحسب نظرية سابقة وجدنا أن $u(0,t) = 0$ ، أي أنَّ الدالة المعرفة بالعلاقة (4) عندما $x = 0$ تحقق الشرط الحدي (3) ، ومن جهة أخرى فإنَّ هذه الدالة عندما $t = 0$ و $x > 0$ تحقق الشروط الابتدائية (2) وذلك لأنَّ:

$$u(x,0)=\frac{\phi(x)+\phi(x)}{2}+\underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x}^{x}\Psi(z)dz}_{=0}=\frac{2\phi(x)}{2}=\phi(x)=\varphi(x)\ ;\ x>0$$

ولنوجد u_t :

$$u_t(x,t)=\frac{(a)\phi'(x+at)+(-a)\phi'(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\Psi(x+at)(a)-\Psi(x-at)(-a)+0\right]$$

$$u_t(x,0)=\frac{a\phi'(x)-a\phi'(x)}{2}+\frac{1}{2a}\left[a\Psi(x)+a\Psi(x)\right]=\Psi(x)=\psi(x)\ ;\ x>0$$

وهذا الحل (أي الحل (4)) بالعودة للدوال القديمة $\varphi(x)$, $\psi(x)$ يكتب على الشكل التالي:

❶ حالة $x-at>0$ أي $t<\frac{x}{a}$: من العلاقة (4) نحصل على:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz\quad ;\ t<\frac{x}{a}$$

وهي علاقة دالأمبير .

❷ حالة $x-at<0$ أي $t>\frac{x}{a}$:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)\,dz}_{=I}$$

ومنه فإنَّ:

$$I=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)\,dz=\frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{0}\Psi(z)\,dz+\int_{0}^{x+at}\Psi(z)\,dz\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\underbrace{\int_{x-at}^{0}-\psi(-z)\,dz}_{=I_1}+\int_{0}^{x+at}\psi(z)\,dz\right]$$

ولإنجاز التكامل I_1 نجري التحويل:

$$-z=v\ \Rightarrow\ -dz=dv$$
$$z=x-at\quad ,\ v=at-x$$
$$z=0\ \Rightarrow\ v=0$$

ومنه فإنَّ:

$$I_1=\int_{x-at}^{0}-\psi(-z)\,dz=\int_{at-x}^{0}\psi(v)\,dv=\int_{at-x}^{0}\psi(z)\,dz$$

ومنه يكون:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_{at-x}^{0}\psi(z)\,dz+\int_{0}^{at+x}\psi(z)\,dz\right]$$

$$=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi(z)\,dz$$

حل التطبيق:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+t)-\varphi(t-x)}{2}+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\psi(z)\,dz \quad ;t>x \quad \cdots(*)$$

$$u(x,t)=\frac{(x+t)-(t-x)}{2}+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}2z\;dz=x+\frac{1}{2}\left[z^2\right]_{z=t-x}^{z=t+x}=x+\frac{1}{2}\left[(t+x)^2-(t-x)^2\right]$$

$$=x+\frac{1}{2}\left[\left(t^2+2xt+x^2\right)-\left(t^2-2xt+x^2\right)\right]=x+\frac{1}{2}(4xt)=x+2xt=x(1+2t)$$

السـؤال الثـاني(34 درجـة): **1)** أثبت أنَّ يوجد دالة واحدة فقط $u(x,t)$، معرفة في المنطقة $R=\{0\le x\le \ell\,,\,t\ge 0\}$، وتحقق المعادلة التفاضلية:

$$\rho(x)u_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)u_x\right]+F(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

علماً أنَّ: $t>0\,,\;0<x<\ell\,,\;\rho(x)>0\,,\;k(x)>0$ ، والشروط الإضافية:

$$u(x,0)=\varphi(x)\;,\;u_t(x,0)=\psi(x)\;,\;u(0,t)=\mu_1(t)\;,\;u(\ell,t)=\mu_2(t) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

إذا تحققت الشروط الآتية:

أ) الدالــة $u(x,t)$ والمشــتقات التــي تــدخل فــي المعادلــة التفاضــلية، وكــذلك المشــتقة u_{xt} تكــون دوال متصــلة فــي الفتــرة $R=\{0\le x\le \ell\,,\,t\ge 0\}$.

ب) المعاملان $\rho(x)\,,\,k(x)$ متصلان في الفترة المغلقة $0\le x\le \ell$.

2) أوجد حل المعادلة في حالة:

$$\mu_1(t)=1\;,\;\mu_2(t)=t\;,\;\varphi(x)=1-\frac{x}{\pi}\;,\;\psi(x)=\frac{x}{\pi}$$

$$F(x,t)=\sin x\,\sin t\;,\;\rho(x)=k(x)=1\;,\;\ell=\pi$$

الحل:

أولاً: القسم النظري:

بفرض أنَّه يوجد حلان للمسألة المطروحة $\left[(2),(1)\right]$ هما:

$$u_1(x,t)\;,\;u_2(x,t)$$

وبعد ذلك ندرس الفرق:

$$v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

❶ وسوف نثبت أنَّ الدالة $v(x,t)$ تحقق المعادلة المتجانسة الموافقة لـ (1) أي المعادلة:

$$\rho(x)v_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)v_x\right] \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

الإثبات: بما أنَّ $u_1(x,t)$ هو حل للمعادلة المعطاة (1) فهو يحققها أي أنَّ:

$$\rho(x)(u_1)_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)(u_1)_x\right]+F(x,t)$$

وبما أنَّ $u_2(x,t)$ هو حل للمعادلة المعطاة (1) فهو يحققها أي أن:

$$\rho(x)(u_2)_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)(u_2)_x\right]+F(x,t)$$

وبطرح العلاقتين السابقتين نجد أنَّ:

$$\rho(x)\left[(u_1)_{tt}-(u_2)_{tt}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\left[(u_1)_x-(u_2)_x\right]\right]$$

وبالتعويض عن $u_1(x,t)-u_2(x,t)$ بـ $v(x,t)$ نحصل على العلاقة (3).

❷ وأيضاً الدالة $v(x,t)$ تحقق الشروط الإضافية المتجانسة التالية:

$$\left.\begin{array}{l} v(x,0)=0 \quad , \; v_t(x,0)=0 \\ v(0,t)=0 \quad , \; v(\ell,t)=0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

وذلك لأنَّ:

$$v(0,t)=u_1(0,t)-u_2(0,t)=\mu_1(t)-\mu_1(t)=0$$
$$v(\ell,t)=u_1(\ell,t)-u_2(\ell,t)=\mu_2(t)-\mu_2(t)=0$$
$$v(x,0)=u_1(x,0)-u_2(x,0)=\varphi(x)-\varphi(x)=0$$
$$v_t(x,0)=u_{1t}(x,0)-u_{2t}(x,0)=\psi(x)-\psi(x)=0$$

❸ سوف نثبت أنَّ الدالة $v(x,t)$ تساوي الصفر بالتطابق، وذلك كما يلي:

ندرس الدالة:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[k(v_x)^2+\rho(v_t)^2\right]dx \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

وسوف نثبت أنَّها لا تعتمد على t :

المعنى الفيزيائي للدالة $E(t)$ واضح، فهي الطاقة الكلية للوتر في اللحظة الزمنية t ، وباشتقاق طرفي العلاقة (5) بالنسبة لـ t نجد:

$$\frac{dE(t)}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\ell}\left[k(v_x)^2+\rho(v_t)^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[2k(v_xv_{xt})+2\rho(v_tv_{tt})\right]dx=$$
$$=\int_0^{\ell}\left[k(v_xv_{xt})+\rho(v_tv_{tt})\right]dx$$

وبمكاملة الحد الأول من الطرف الأيمن بالتجزئة وبالاستفادة من الشروط الإضافية المتجانسة (4) نجد:

$$u = kv_x \Rightarrow du = (kv_x)_x\,dx \quad , \; dv = v_{xt}dx \Rightarrow v = v_t$$

$$\int_0^{\ell} k\,(v_x v_{xt})\,dx = \left[kv_x v_t\right]_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^{\ell} v_t\,(kv_x)_x\,dx = -\int_0^{\ell} v_t\,(kv_x)_x\,dx \;\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$;\; v_x(0,t) = v_x(\ell,t) = 0$$

وبتعويض العلاقة (6) في العلاقة الأخيرة التي تسبقها، وبالاستعانة بالعلاقة(3) ينتج أنَّ:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^{\ell}\left[\rho(v_t v_{tt}) - v_t\,(kv_x)_x\right]dx = \int_0^{\ell} v_t\,\underbrace{\left[\rho(v_{tt}) - (kv_x)_x\right]}_{=0\;,(3)}dx = 0$$

إذاً:

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0 \Rightarrow E(t) = const$$

وبأخذ الشروط الابتدائية (4) بعين الاعتبار نجد أنَّ:

$$const = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\underbrace{\left[k\,(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\right]_{t=0}}_{=0\;;\;t=0}dx = 0$$

ومن ثم ينتج أنَّ: $E(t) = 0$ أي أنَّ العلاقة (5) تكتب على الشكل:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[k\,(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\right]dx = 0$$

وبما أنَّ $k(x) > 0$، و $\rho(x) > 0$، و $t > 0\,,\,0 < x < \ell$ فإنَّ العلاقة الأخيرة تتحقق فقط عندما يكون:

$$v_x(x,t) = 0 \;,\; v_t(x,t) = 0$$

وبما أنَّ:

$$v_t(x,t) = 0 \Rightarrow v(x,t) = c_0 = const$$

وبالاستفادة من الشروط (4) نجد أنَّ:

$$0 = v(x,0) = c_0 \Rightarrow \boxed{c_0 = 0}$$

وبالتالي نجد أنَّ: $v(x,t) = 0$ وبالتالي فإنَّ:

$$0 = v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \Rightarrow u_1(x,t) - u_2(x,t) = 0 \Rightarrow \boxed{u_1(x,t) = u_2(x,t)}$$

أي أنَّه إذا وجدت دالتين $u_1(x,t)\,,u_2(x,t)$ تحققان شروط المسألة المعطاة فإنَّ: $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ أي أن للمسألة المعطاة حل وحيد.

2) القسم العملي: أوجد حل المعادلة في حالة:

$$\mu_1(t) = 1 \;,\; \mu_2(t) = t \;,\; \varphi(x) = 1 - \frac{x}{\pi} \;,\; \psi(x) = \frac{x}{\pi}$$

$$F(x,t) = \sin x\,\sin t \;,\; \rho(x) = k(x) = 1 \;,\; \ell = \pi$$

بتعويض المعطيات في المسألة المعطاة فإنها تأخذ الشكل:

$$u_{tt}=u_{xx}+\sin x \sin t \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=1-\dfrac{x}{\pi} \quad , \quad u_t(x,0)=\dfrac{x}{\pi} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=1 \; , \; u(\pi,t)=t \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـــل:

إنَّ المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=1 \; , \; \ell=\pi \; , \quad f(x,t)=\sin x \sin t$$

$$\varphi(x)=1-\frac{x}{\pi} \; , \; \psi(x)=\frac{x}{\pi} \quad , \; \mu_1(t)=1 \; , \; \mu_2(t)=t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=1+\frac{x}{\pi}[t-1]$$

$$\boxed{U(x,t)=1+\frac{x}{\pi}(t-1)} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=\frac{x}{\pi} \quad , \; U_{tt}(x,t)=0 \, , \; U_{xx}(x,t)=0 \quad , \; U(x,0)=1-\frac{x}{\pi} \quad , \; U_t(x,0)=\frac{x}{\pi}$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2 v_{xx}+\overline{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x) \; , \; v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=\sin x \sin t-\left[0-1(0)\right]=\sin x \sin t$$

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=1-\frac{x}{\pi}-\left(1-\frac{x}{\pi}\right)=0 \quad , \; \overline{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=\frac{x}{\pi}-\frac{x}{\pi}=0$$

وبالتالي فإنَّ $v(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=v_{xx}+\sin x \sin t \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=0 \quad , \; v_t(x,0)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v(\pi,t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

بما أنَّ $\overline{\varphi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\varphi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $C_n=0$، وبما أنَّ $\overline{\psi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\psi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $D_n=0$ وكما أنَّ:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin t\,\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\sin t\int_0^{\pi}\sin\xi\,\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\sin t\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{f_n}(t)=\begin{cases}\sin t\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}}$$

وبما أنَّ $\overline{f_n}(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ فإنَّ $T_n(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ وبالتالي فإنَّ:

$$T_1(t)=\frac{\pi}{(1)\pi(1)}\int_0^{t}\sin\left[\frac{(1)\pi}{\pi}(1)(t-\tau)\right]\sin\tau\,d\tau=\int_0^{t}\sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{t}\left[\cos(t-\tau+\tau)-\cos(t-\tau-\tau)\right]d\tau=-\frac{1}{2}\cos t\int_0^{t}d\tau+\frac{1}{2}\int_0^{t}\cos(t-2\tau)d\tau$$

$$=-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\sin(t-2\tau)\right]_0^{t}=-\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{4}\left[\sin(t-2\tau)\right]_0^{t}=$$

$$=-\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{4}\left[\sin(-t)-\sin(t)\right]=-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\sin t=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=1+\frac{x}{\pi}(t-1)+\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)\sin x}$$

السؤال الثالث(26 درجة): أوجد حل المعادلة:

$$u_t=u_{xx}-2u_x+e^x(t+1)+e^{x-t}\sin\pi x \quad ,0<x<1,\ t>0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي: $u(x,0)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=t \quad , \quad u(1,t)=e.t \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وفيها:

$$a=1,\ b=-2\ ,\ c=0\ ,\ f(x,t)=e^x(t+1)+e^{x-t}\sin\pi x \quad ,\ \varphi(x)=0$$
$$\mu_1(t)=t \quad ,\quad \mu_2(t)=e.t$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t) \ \Rightarrow\ u(x,t)=e^{\left[0-\frac{(-2)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{(-2)}{2(1)^2}x}v(x,t) \ \Rightarrow$$
$$u(x,t)=e^{x-t}v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

وبالاشتقاق مرة بالنسبة t ومرتين بالنسبة لـ x ، ثم التعويض في (1) و (2) و (3) على الترتيب نجد أنَّ:

نعوض في (3) لنجد أنَّ:

$$t=u(0,t)=e^{-t}v(0,t) \Rightarrow v(0,t)=te^t$$
$$e.t=u(1,t)=e^{1-t}v(1,t) \Rightarrow v(1,t)=te^t$$

وبالتالي فإنَّ الدالة $v(x,t)$ هي حل للمسألة الجديدة الآتية:

$$v_t=v_{xx}+e^t(t+1)+\sin\pi x \ \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشرط الابتدائي: $v(x,0)=e^{-x}(0)=0\cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية: $v(0,t)=te^t \ ,\ v(1,t)=te^t \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

وهذه المسألة الجديدة فيها:

$$a=1,\ \ell=1,\ \overline{f}(x,t)=e^t(t+1)+\sin\pi x \ ,\ \overline{\varphi}(x)=0 \quad ,\ \overline{\mu_1}(t)=te^t \ ,\ \overline{\mu_2}(t)=te^t$$

وهي مسألة حدية غير متجانسة بالشروط الحدية غير الصفرية وحلها يعطى بالشكل:

$$v(x,t)=V(x,t)+w(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4')$$

حيث أنَّ:

$$V(x,t)=\overline{\mu_1}(t)+\frac{x}{\ell}\left[\overline{\mu_2}(t)-\overline{\mu_1}(t)\right]=te^t+\frac{x}{1}\left[te^t-te^t\right]=te^t$$

$$V(x,0)=0\ ,V_t=te^t+e^t=e^t(t+1),V_{xx}=0$$

أما $w(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية التالية:

$$w_t=a^2w_{xx}+\overline{\overline{f}}(x,t)$$

بالشرط الابتدائي: $w(x,0)=\overline{\overline{\varphi}}(x)$

وبالشروط الحدية الصفرية: $w(0,t)=0\ ,\ w(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{\overline{f}}(x,t)=\overline{f}(x,t)-\left[V_t-a^2V_{xx}\right]=\sin\pi x+e^t(t+1)-\left[e^t(t+1)-0\right]=\sin\pi x$$

$$\overline{\overline{\varphi}}(x)=\overline{\varphi}(x)-V(x,0)=0-0=0$$

أي أن المسألة الجديدة هي:

$$w_t=w_{xx}+\sin\pi x\quad\cdots\cdots\cdots(1'')$$

بالشرط الابتدائي: $w(x,0)=0\quad\cdots\cdots\cdots(2'')$

وبالشروط الحدية الصفرية: $w(0,t)=0\ ,\ w(1,t)=0\ \cdots\cdots\cdots(3'')$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}w_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(4'')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\overline{\varphi}}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\quad,\quad w_n(t)=\int_0^te^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)}\overline{\overline{f_n}}(\tau)d\tau$$

$$\overline{\overline{f_n}}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\overline{f}}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبما أنَّ $\overline{\overline{\varphi}}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\overline{\varphi}}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $C_n=0$ ، وكما أنَّ:

$$\overline{\overline{f_n}}(t)=\frac{2}{1}\int_0^1\sin(\pi\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=2\int_0^1\sin(\pi\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi=2\begin{cases}\frac{1}{2}\ ,n=1\\0\ \ ,n\neq1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overline{\overline{f_n}}(t)=\begin{cases}1,n=1\\0\ \ ,n\neq1\end{cases}$$

وبما أنَّ $\overline{\overline{f_n}}(t)=0$ من أجل $n\neq1$ ، فإن $w_n(t)=0$ من أجل $n\neq1$، وبالتالي:

$$w_1(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{(1)\pi(1)}{1}\right)^2(t-\tau)}(1)d\tau=\int_0^t e^{-\pi^2(t-\tau)}d\tau=e^{-\pi^2 t}\int_0^t e^{\pi^2\tau}d\tau=e^{-\pi^2 t}\left[\frac{1}{\pi^2}e^{\pi^2\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=$$

$$=e^{-\pi^2 t}\left[\frac{1}{\pi^2}\left(e^{\pi^2 t}-1\right)\right]=\frac{1}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل $(4')$ نجد أنَّ:

$$\boxed{w(x,t)=\frac{1}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x)}\quad\cdots\cdots\cdots(5'')$$

وبتعويض العلاقة $(5'')$ في العلاقة $(4')$ نجد أن الحل العام للمسألة الحدية المعطاة هو:

$$\boxed{v(x,t)=te^t+\frac{1}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x)}\quad\cdots\cdots\cdots(5')$$

وبالتعويض في العلاقة (4) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو:

$$u(x,t)=e^{x-t}\left[te^t+\frac{1}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x)\right]$$

السؤال الربع(20 درجة): أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ في الإحداثيات الكروية العامة $u(r,\theta,\varphi)$، داخل كرة نصف قطرها $R=1$ والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$\left.(u+u_r)\right|_{r=1}=2\cos\theta+\left[6\sqrt{2}\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+18\sin^2\varphi\right]\sin^2\theta$$

الحل: إنَّ حل المسألة الحدية المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta,\varphi)\quad;\quad r\le R$$

ولدينا من نص السؤال أنَّ $R=1$، بالتعويض في عبارة الحل نجد أنَّ: $u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n Y_n(\theta,\varphi)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$

نشتق العلاقة (1) بالنسبة لـ r فنجد أنَّ: $u_r(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}Y_n(\theta,\varphi)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

وبالتالي فإنَّ: $u+u_r=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}(r+n)r^{n-1}Y_n(\theta,\varphi)\quad\cdots\cdots\cdots(3)$

ومنه فإنَّ:

$$\left.(u+u_r)\right|_{r=1}=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}(1+n)Y_n(\theta,\varphi)=Y_0+2Y_1+3Y_2+\cdots\cdots\cdots$$

$$=a_0+2\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+3\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

كما أنَّ الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل:

$$(u+u_r)\big|_{r=1}=2\cos\theta+\left[6\sqrt{2}\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+18\sin^2\varphi\right]\sin^2\theta$$

$$=2\cos\theta+\left[6\sqrt{2}\left[\cos(2\varphi)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin(2\varphi)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]+18\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)\right]\sin^2\theta$$

$$=2\cos\theta+\left[6\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi\right]+9-9\cos 2\varphi\right]\sin^2\theta$$

$$=2\cos\theta+(6\cos 2\varphi-6\sin 2\varphi+9-9\cos 2\varphi)\sin^2\theta$$

$$=2\cos\theta+(-3\cos 2\varphi-6\sin 2\varphi)\sin^2\theta+9\sin^2\theta$$

$$=2\cos\theta+9-9\cos^2\theta+(-3\cos 2\varphi-6\sin 2\varphi)\sin^2\theta$$

إذاً أصبح لدينا أنَّ:

$$=2\cos\theta+9-9\cos^2\theta+(-3\cos 2\varphi-6\sin 2\varphi)\sin^2\theta=(u+u_r)\big|_{r=1}=$$

$$=a_0+2\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+3\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$9a_2=-9\ \Rightarrow\ \boxed{a_2=-1}\quad,\ a_0-3a_2=9\ \Rightarrow\ a_0=9+3a_2=9+3(-1)=6\Rightarrow\ \boxed{a_0=6}$$

$$2a_1=2\ \Rightarrow\ \boxed{a_1=1}\quad,\ 2b_1=0\ \Rightarrow\ \boxed{b_1=0}\quad,2c_1=0\ \Rightarrow\ \boxed{c_1=0}$$

$$3b_2=0\ \Rightarrow\ \boxed{b_2=0}\quad,3c_2=0\ \Rightarrow\ \boxed{c_2=0}\quad,3d_2=-3\ \Rightarrow\ \boxed{d_2=-1}\quad,\ 3e_2=-6\ \Rightarrow\ \boxed{e_2=-2}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^nY_n(\theta,\varphi)=Y_0+rY_1+r^2Y_2+r^3Y_3+\cdots\cdots$$

$$=a_0+r\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+r^2\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi)=6+r\cos\theta-r^2\left[\left(3\cos^2\theta-1\right)+(\cos 2\varphi+2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]}$$

انتهت الأجوبة

أ. أحمد حاتم أبو حاتم

0947075489

